Table de mortalité : des âges révolus aux âges exacts

Mise à jour 4/9/2012

Introduction

La présente note vise à donner une méthode simple permettant de passer des tables entre âges *révolus*, telles que publiées désormais par la DGSIE[1], ex-INS[2], à des tables entre âges *exacts* susceptibles d'intéresser différents utilisateurs comme les actuaires, les assureurs, les démographes, etc. La note est suivie de la collection complète des tables belges présentées entre âges exacts.

La table de mortalité publiée pour les années 1994-1996 par l'INS marque en effet une rupture méthodologique. Les tables précédentes, jusques et y compris celle des années 1991-1993, sont établies entre âges exacts alors que, par la suite, elles le sont entre âges révolus.

Pourtant, la présentation des tables 1994-1996 et suivantes n'est pas modifiée par rapport aux tables antérieures. Elle comporte notamment les rubriques suivantes, les chiffres étant ceux de la table 2002 Hommes par exemple :

âge	probabilité de décès	nombre de survivants	nombre de décès d'un âge au suivant	espérance de vie
0	0,004032	1.000.000	4.032	75,58
1	0,001280	995.968	1.275	74,88
2	0,000424	994.693	421	73,98

Dans les tables 1994-1996 et suivantes, les âges de la première colonne sont réputés *révolus*, alors que les âges des tables précédentes sont *exacts*. Comme on peut le constater, cette précision essentielle ne figure pas sur les tables elles-mêmes, ce qui constitue une regrettable source de confusion. Notons en outre que, selon l'édition, l'âge indiqué en première ligne est soit « 0 », soit un énigmatique « <1 ».

Ce n'est pas tout : par rapport aux âges révolus, les chiffres des tables 1994-1996 et suivantes sont inexacts :
▪ les chiffres figurant en regard de l'âge 0 de la table ne correspondent pas à l'âge 0 révolu. Par ailleurs, l'espérance de vie de 75,58 ans ne correspond ni à l'âge 0 exact (c'est-à-dire à la naissance), ni à l'âge 0 révolu.
▪ les chiffres correspondant aux âges suivants sont décalés d'une ligne :
- les chiffres figurant en regard de l'âge 1 de la table correspondent en réalité à l'âge révolu 0 ;
- les chiffres figurant en regard de l'âge 2 de la table correspondent en réalité à l'âge révolu 1, et ainsi de suite.

La situation a été heureusement rectifiée lors de la publication des tables 2007 par la DGSIE, sur le site duquel sont actuellement disponibles les tables de chacune des années 1998 à 2009[3]. Pour la table 2002 par exemple, on trouve les chiffres suivants dont la comparaison avec ceux du premier tableau est édifiante :

âge révolu	probabilité de décès	nombre de survivants	nombre de décès d'un âge au suivant	espérance de vie
birth	0,004032	1.000.000	4.032	75,08
0	0,001280	995.968	1.275	74,88
1	0,000424	994.693	421	73,98

[1] Direction générale de la Statistique et de l'Information économique.
[2] Institut National de Statistique.
[3] Voir http://statbel.fgov.be/fr/modules/publications/statistiques/population/tables_de_mortalite.jsp

On retrouve les erreurs relevées ci-dessus. En particulier, l'espérance de vie à la naissance, indicateur médiatique de la longévité, est surestimée d'une demi-année dans les tables 1994-1996 et suivantes, alors qu'aux âges suivants, l'espérance de vie correspond à un rajeunissement d'une année.

1. Terminologie en matière d'âge

La démographie distingue les âges suivants :

L'**âge exact** mesure la durée précise écoulée depuis la naissance et varie donc à tout moment. Il s'exprime en années, mois et jours ou en dixièmes et centièmes d'années. Sauf mention contraire, les âges exacts envisagés ici sont les âges exacts entiers.

L'**âge révolu** est l'âge au dernier anniversaire, c'est-à-dire le nombre entier d'années vécues par la personne à un moment donné. L'âge révolu le 3 janvier 2012 par une personne née le 3 septembre 1939 est 72 ans et son âge exact est 72 ans et 4 mois.

L'**âge atteint** (au cours de l'année civile) est la différence entre l'année de survenance d'un évènement (décès, mariage, naissance…) et l'année de naissance de l'individu concerné. Tous les individus nés en 1939 et décédés en 2012 sont morts à l'âge atteint de 73 ans, soit 2012-1939.

2. Table de mortalité entre âges révolus

Depuis 2009, la DGSIE publie des tables mortalité qu'elle qualifie explicitement de tables en « âge révolu ». La figure 1 représente le début d'une telle table purement fictive et avec une racine de 1.000 (et non de 1.000.000 comme le fait la DGSIE). Dans cet exemple (*cf.* figure 1.A) :

1°) le nombre de survivants à la naissance, soit à 0 an exact (et dénommé par la DGSIE « birth ») est de 1.000 :

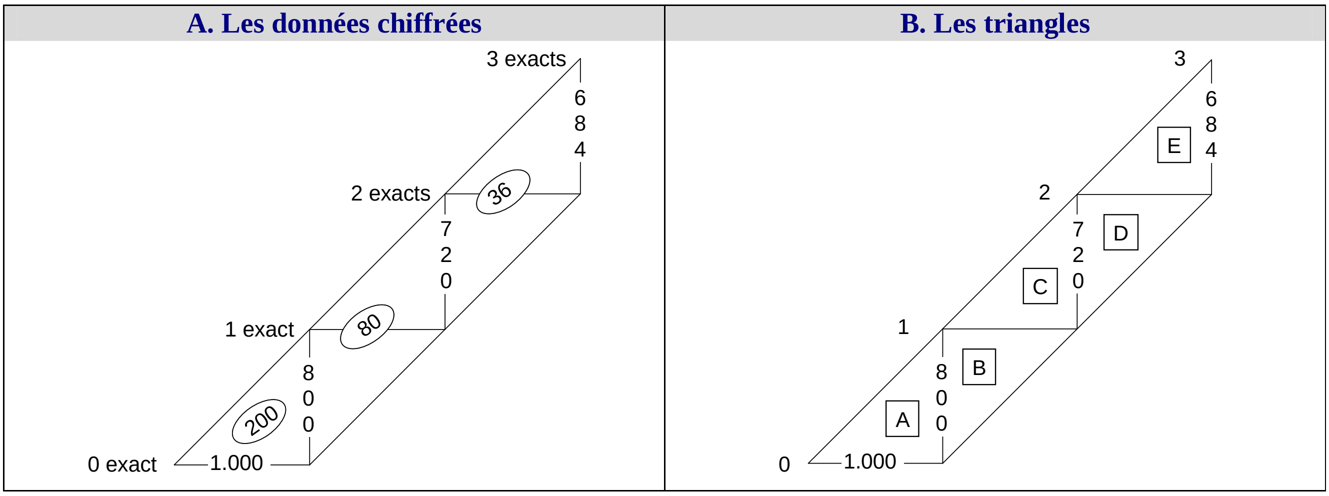
2°) Le nombre de survivants à 0 an révolu (soit à la fin de la première année civile de vie) est de 800. Et donc :
▪ entre la naissance et 0 an révolu, il y a 200 décès, qui se localisent dans le triangle A (*cf.* figure 1.B) ;
▪ le quotient de mortalité entre la naissance et 0 an révolu vaut donc 200/1.000 = 20%. Ce quotient concerne des individus qui vivront entre 0 et 1 an durant l'année de leur naissance

3°) Le nombre de survivants à 1 an révolu (soit la fin de la 2^{e} année de vie) est de 720. Et donc :
▪ entre 0 an révolu et 1 an révolu, il y a 80 décès, qui se localisent des les triangles B et C (*cf.* figure 1.B) ;
▪ le quotient de mortalité à 0 an révolu vaut donc 80/800 = 10%. Ce quotient, comme ceux qui suivent, porte sur 1 an ;

4°) De la même manière, le quotient de mortalité à 1 an révolu vaut 36/760 = 5%, et ainsi de suite.

Les âges de 0 an révolu, 1 an révolu, etc. seront notés $\underline{0}$, $\underline{1}$, etc.

Figure 1. Représentation sur diagramme de Lexis du début de la table initiale entre âges révolus



Le tableau 1 indique la séquence des évènements. Ainsi, par exemple, les 200 décès de la ligne intermédiaire entre la ligne de la naissance et la ligne de 0 an révolu se sont bien produits entre la naissance et 0 an révolu, les âges qui délimitent le triangle A. De même, les 80 décès se sont produits entre 0 an révolu et 1 an révolu, les âges qui délimitent le parallélogramme composé des triangles B et C, et ainsi de suite.

Tableau 1. Début de la table entre âges révolus

âge		*survivants*	*quotient de mortalité*	*décès*
birth ou 0	naissance	1.000	20%	
				200
0	31/12 de l'année de naissance	800	10%	
				80
1	31/12 de l'année du 1er anniv.	760	5%	
				36
2	31/12 de l'année du 2e anniv.	684		

Cette façon de décaler les fonctions de la table dans le tableau indique bien que les nombres de décès n'ont pas la même référence temporelle que les nombres de survivants ou les risques subis par ceux-ci.

C'est bien à la naissance que les 1.000 survivants sont décomptés et subissent un risque de décès avant l'âge de 0 an révolu égal à 20%. Les 1.000 survivants et le risque de 20% sont donc mis sur la même ligne du tableau. Par contre, les 200 décès survenant parmi les 1.000 survivants surviennent entre la naissance et l'âge de 0 an révolu. Ces décès sont donc à localiser sur une ligne intermédiaire entre celle de la naissance et celle de 0 an révolu.

De la même façon, c'est bien à l'âge de 0 an révolu que les 800 survivants sont décomptés et subissent un risque de décès avant l'âge de 1 an révolu égal à 10%. Les 800 survivants et le risque de 10% sont donc mis sur la même ligne du tableau. Par contre, les 80 décès survenant parmi les 800 survivants surviennent entre l'âge de 0 an révolu et l'âge de 1 an révolu. Ces décès sont donc à localiser sur une ligne intermédiaire entre celle de 0 an révolu et celle de 1 an révolu, etc.

3. Table de mortalité entre âges exacts

A partir de ces données, comment calculer une table entre âges exacts ? En supposant la répartition uniforme des décès, les 80 décès entre 0 an révolu et 1 an révolu se répartissent entre les deux triangles B et C de la figure 1, à raison de 40 décès par triangle. En conséquence, le nombre de survivants à 1 an exact est de 800 – 40 = 760. Le nombre de survivants à 2 ans exacts de s'obtient de la même façon : 720 – 18 = 702.

Les âges de 0 an exact, 1 an exact, etc. seront notés 0, 1, etc.

Figure 2. Représentation sur diagramme de Lexis de la transformation de la table

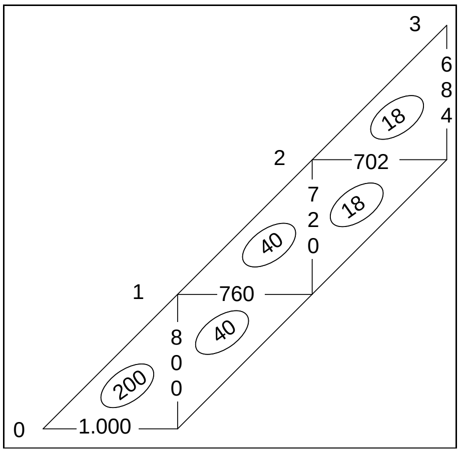


Tableau 2. Répartition des décès par triangle et calcul du nombre de décès aux âges exacts

âge	*survivants*	*décès*
0 exact (0) ou *birth*	1.000	
		200
0 révolu (<u>0</u>)	800	
		40
1 exact (1)	760	
		40
1 révolu (<u>1</u>)	720	
		18
2 exacts (2)	702	
		18
2 révolus (<u>2</u>)	684	

Le tableau 3 ne reprend que ce qui est utile pour la table entre âges exacts, à savoir :

1°) les nombres de survivants aux âges exacts, obtenus ci-avant ;

2°) les nombres de décès entre âges exacts, obtenus par addition des décès dans les parallélogrammes délimités par 2 âges exacts successifs. En particulier, entre 0 an exact (la naissance) et 1 an exact, il y a 240 décès, soit 200 du triangle A plus 40 du triangle B (*cf.* figure 1.B). Ces décès sont à localiser sur une ligne intermédiaire entre celle de la naissance et celle de 1 an exact. De la même manière, entre 1 an exact et 2 ans exacts, il y a 40 + 18 = 58 décès ;

3°) les quotients de mortalité aux âges exacts, calculés en divisant le nombre de décès entre deux âges exacts successifs par le nombre de survivants au premier de ces deux âges. En particulier, le quotient de mortalité à la naissance est égal à 240 / 1.000 = 24%. C'est à la naissance que les 1.000 survivants subissent un risque de décès avant l'âge de 1 an exact égal à 24%. Le nombre des 1.000 survivants et le risque de 24% sont donc mis sur la même ligne du tableau. De la même manière, le quotient de mortalité à l'âge exact 1 an est égal à 58 / 760 = 0,763%.

Tableau 3. Début de la table entre âges exacts

âge exact		*survivants*	*décès*	*quotient de mortalité*
0	naissance	1.000		24%
			240	
1	1er anniversaire	760		7,63%
			58	
2	2e anniversaire	702		

La procédure suivie pour obtenir le quotient de mortalité à 1 an exact peut s'appliquer à tous âges supérieurs[4].

Dans les paragraphes suivants nous verrons comment on peut élaborer une table entre âges exacts à partir d'une table entre âges révolus, objectif poursuivi dans cette note.

4. Nombre de décès et nombre de survivants

4.1. Nombre de décès entre les âges exacts 0 et 1. On a, avec des notations évidentes :

$$d_{0\to 1} = d_{0\to \underline{0}} + \frac{d_{\underline{0}\to \underline{1}}}{2} \qquad (1)$$

4.2. Nombre de décès entre les âges exacts x > 0 et x+1[5]

$$d_{x\to x+1} = \left(\frac{d_{\underline{x-1}\to \underline{x}}}{2}\right) + \left(\frac{d_{\underline{x}\to \underline{x+1}}}{2}\right) \qquad (2)$$

4.3. Nombre de survivants aux âges exacts x > 0 issu d'une population initiale l_0

$$l_x = l_{\underline{x-1}} - \left(\frac{d_{\underline{x-1}\to \underline{x}}}{2}\right) \quad \text{ou} \quad l_x = l_{x-1} - d_{x-1\to x} \qquad (3)$$

5. Quotient de mortalité

5.1. Quotient de mortalité à la naissance

$$q_{0\to 1} = \frac{d_{0\to 1}}{l_0} = \frac{d_{0\to \underline{0}} + \frac{d_{\underline{0}\to \underline{1}}}{2}}{l_0} \qquad (4)$$

d'où successivement :

$$q_{0\to 1} = q_{0\to \underline{0}} + \frac{l_{\underline{0}} - l_{\underline{1}}}{2 l_0}$$

$$q_{0\to 1} = q_{0\to \underline{0}} + \frac{l_{\underline{0}}}{l_0}\,\frac{l_{\underline{0}} - l_{\underline{1}}}{2 l_{\underline{0}}}$$

---

[4] Au point de vue purement méthodologique et sans que cela n'ait de conséquence notable sur les résultats, il faut souligner que l'hypothèse de répartition uniforme des décès entre 2 âges exacts, hypothèse nécessaire au calcul de la table de mortalité et singulièrement des espérances de vie, se heurte à une contradiction. En effet, les nombres de décès entre les 2 âges exacts x et x+1 s'obtiennent par addition de la moitié des décès observés d'une part entre x-1 révolu et x révolu et, d'autre part, entre x révolu et x+1 révolu. À moins que les nombres de décès entre âges révolus soient stables, les deux triangles constituant le parallélogramme entre deux âges exacts ne contiendront pas le même nombre de décès, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse de répartition uniforme, pourtant utilisée dans la suite de nos calculs.

[5] Noté d_x par les actuaires.

$$q_{0\to 1} = q_{0\to \underline{0}} + (1-q_{0\to \underline{0}})\frac{q_{0\to \underline{1}}}{2} \qquad (5)$$

c'est-à-dire, en adoptant les notations $q_{0 \to \underline{0}} = q_{birth}$ et $q_{0\to 1} = q_0$:

$$q_0 = q_{birth} + (1-q_{birth})\frac{q_0}{2} \qquad (6)$$

Cette formule permet de calculer la valeur du 1er quotient de la table entre âges exacts (entre 0 et 1 an exact) au départ des quotients de la table entre âges révolus d'une part entre 0 an exact et 0 an révolu et, d'autre part, entre 0 an révolu et 1 an révolu.

5.2. Quotient de mortalité aux âges exacts x > 0

$$q_{x \to x+1} = \frac{\left(\frac{d_{\underline{x-1} \to \underline{x}}}{2}\right) + \left(\frac{d_{\underline{x} \to \underline{x+1}}}{2}\right)}{l_{\underline{x-1}} - \left(\frac{d_{\underline{x-1} \to \underline{x}}}{2}\right)} \qquad (7)$$

c'est-à-dire :

$$q_{x \to x+1} = \frac{d_{x \to x+1}}{l_x} \qquad (8)$$

d'où, en adoptant la notation $q_{x \to x+1} = q_x$ (valable également pour x=0) :

$$q_x = \frac{l_{\underline{x-1}} - l_{\underline{x}} + l_{\underline{x}} - l_{\underline{x+1}}}{2l_{\underline{x-1}} - l_{\underline{x-1}} + l_{\underline{x}}} = \frac{l_{\underline{x-1}} - l_{\underline{x+1}}}{l_{\underline{x-1}} + l_{\underline{x}}}$$

soit, puisque :

$$1 - q_{\underline{x}} = \frac{l_{\underline{x+1}}}{l_{\underline{x}}}$$

$$q_x = \frac{1-(1-q_{\underline{x-1}})(1-q_{\underline{x}})}{1-(1-q_{\underline{x-1}})} = \frac{q_{\underline{x-1}} + q_{\underline{x}} - q_{\underline{x-1}} \cdot q_{\underline{x}}}{2 - q_{\underline{x-1}}} \qquad (9)$$

5.3. Valeurs approchées pour les âges exacts x > 0. On a :

$$\frac{1}{2 - q_{\underline{x-1}}} = \frac{1}{2} + \frac{q_{\underline{x-1}}}{4} + \frac{(q_{\underline{x-1}})^2}{8} + \ldots$$

Donc, si les termes en $(q_{\underline{x-1}})^3$ sont négligeables, ce qui est le cas sauf aux extrémités de la table :

$$q_x \approx (q_{\underline{x-1}} + q_{\underline{x}} - q_{\underline{x-1}} \cdot q_{\underline{x}}) \left(\frac{1}{2} + \frac{q_{\underline{x-1}}}{4} + \frac{(q_{\underline{x-1}})^2}{8} + \ldots\right)$$

$$= \frac{q_{\underline{x-1}} + q_{\underline{x}}}{2} - \frac{q_{\underline{x-1}} \cdot q_{\underline{x}}}{2} + \frac{q_{\underline{x-1}} \cdot q_{\underline{x-1}}}{4} + \frac{q_{\underline{x-1}} \cdot q_{\underline{x}}}{4}$$

Il y a compensation entre les 3 derniers termes qui sont de toute manière le plus souvent négligeables comme termes en $(q_{\underline{x-1}})^2$. Finalement :

$$q_x \approx \frac{q_{\underline{x-1}} + q_{\underline{x}}}{2} \qquad (10)$$

En particulier, si x=1 on obtient : $q_1 \approx \frac{q_{\underline{0}} + q_{\underline{1}}}{2} = \frac{10\% + 5\%}{2}$ = 7,50%, alors que q_x = 7,63%.

Si $q_{\underline{x-1}}$ = 1‰ et $q_{\underline{x}}$ = 1,07‰, ce qui est le cas aux alentours de 30 ans, on a q_x = 1,0350‰ et $q_{x \text{ approché}}$ = 1,0350‰.
Si $q_{\underline{x-1}}$ = 1% et $q_{\underline{x}}$ = 1,07%, ce qui est le cas aux alentours de 60 ans, on a q_x = 1,0348% et $q_{x \text{ approché}}$ = 1,0350%.
Si $q_{\underline{x-1}}$ = 10% et $q_{\underline{x}}$ = 10,7%, ce qui est le cas aux alentours de 85 ans, on a q_x = 10,33% et $q_{x \text{ approché}}$ = 10,35%.

5.4. Exemple concret. Le tableau 4 ci-dessous fournit les chiffres d'une table entre âges révolus élaborée par la DGSIE (il s'agit de la table 2009 Hommes). On en déduit les chiffres de la table entre âges exacts.

Tableau 4a. Exemple concret : de la naissance à 4 ans

Table entre âges révolus				Table entre âges exacts			
âge	quotient de mortalité	survivants	décès	âge	survivants	quotient de mortalité	quotient de mortalité val. approx.
*birth**	0,003160	1.000.000		0 exact*	1.000.000	0,003643	-
			3.160				
0 révolu	0,000969	996.840			3.643		
			966	1 exact	996.357	0,000634	0,000634
1 révolu	0,000298	995.874			631,5		
			297	2 exacts	995.725,5	0,000236	0,000236
2 révolus	0,000173	995.577			235		
			173	3 exacts	995.490,5	0,000199	0,000199
3 révolus	0,000224	995.404			198		
			223	4 exacts	995.292,5	0,000193	0,000193

* Rappelons que l'âge 0 exact de la table entre âges exacts coïncide avec l'âge *birth* de la table entre âges révolus.

Les nombres de décès de la table entre âges exacts sont obtenus comme suit :
▪ 3.643 = 3.160 + 966/2
▪ 631,5 = (966 + 297)/2
▪ 235 = (297 + 173)/2 et ainsi de suite.

Les nombres de survivants sont obtenus comme suit :
▪ 996.357 = 1.000.000 – 3.643
▪ 995.725,5 = 996.357 – 631,5
▪ 995.490,5 = 995.725,5 – 235 et ainsi de suite.

Les quotients de mortalité sont obtenus comme suit :
▪ 0,003643 = 3.643/1.000.000
▪ 0,000634 = 631,5/996.357
▪ 0,000236 = 235/995.725,5 et ainsi de suite.
Ces valeurs coïncident avec les valeurs fournies par les formules (6) et (9).

Les valeurs approchées fournies par la formule (10) sont :
▪ 0,000634 = (0,000969 + 0,000298)/2
▪ 0,000236 = (0,000298 + 0,000173)/2
▪ 0,000199 = (0,000173 + 0,000224)/2 et ainsi de suite.
Les différences avec les valeurs fournies par la formule (9) sont inférieures à 0,000001.

Après avoir levé, comme nous venons de le faire, les ambiguïtés à propos des intervalles de survenance des décès, nous adopterons les présentations simplifiées et habituelles qui suivent.

Tableau 4a(bis). Exemple concret : de la naissance à 4 ans

Table entre âges révolus			
âge révolu	quotient de mortalité	survivants	décès
*birth**	0,003160	1.000.000	3.160
$\underline{0}$	0,000969	996.840	966
$\underline{1}$	0,000298	995.874	297
$\underline{2}$	0,000173	995.577	173
$\underline{3}$	0,000224	995.404	223
$\underline{4}$	0,000163	995.181	162

Table entre âges exacts				
âge exact	décès	survivants	quotient de mortalité	quotient de mortalité val.approx.
0*	3.643	1.000.000	0,003643	-
1	631,5	996.357	0,000634	0,000634
2	235	995.725,5	0,000236	0,000236
3	198	995.490,5	0,000199	0,000199
4	192,5	995.292,5	0,000193	0,000193

* Soulignons l'ambiguïté des notations de cette première ligne : le quotient de mortalité et le nombre de décès sont relatifs à la période $0 \rightarrow \underline{0}$ et ne peuvent être assimilés avec leurs homologues de la table entre âges exacts, qui sont relatifs à la période $0 \rightarrow 1$.

Tableau 4b. Exemple concret : de 79 à 84 ans

Table entre âges révolus			
âge révolu	quotient de mortalité	survivants	décès
$\underline{79}$	0,061995	532.519	33.013
$\underline{80}$	0,067858	499.505	33.895
$\underline{81}$	0,076211	465.610	35.484
$\underline{82}$	0,088361	430.125	38.006
$\underline{83}$	0,099157	392.119	38.881
$\underline{84}$	0,110241	353.238	38.941

Table entre âges exacts				
âge exact	décès	survivants	quotient de mortalité	quotient de mortalité val.approx.
80	33.454	516.012	0,064833	0,064926
81	34.690	482.557	0,071888	0,072034
82	36.745	447.868	0,082045	0,082286
83	38.444	411.122	0,093509	0,093759
84	38.911	372.678	0,104410	0,104699

On observe que la qualité des valeurs approchées demeure excellente, l'écart relatif étant inférieur à 3‰.

Tableau 4c. Exemple concret : de 99 à 105 ans

Table entre âges révolus			
âge révolu	quotient de mortalité	survivants	décès
$\underline{99}$	0,446809	6.548	2.926
$\underline{100}$	0,329670	3.623	1.194
$\underline{101}$	0,390244	2.428	948
$\underline{102}$	0,312500	1.481	463
$\underline{103}$	0,533333	1.018	543
$\underline{104+}$	1,000000	475	475

Table entre âges exacts				
âge exact	décès	survivants	quotient de mortalité	quotient de mortalité val.approx.
100	2.060	5.085	0,405088	0,388239
101	1.071	3.025	0,353979	0,359957
102	705	1.954	0,360795	0,351372
103	503	1.249	0,402469	0,422917
104	509	747	0,681818	0,766667
105	238	238	1,000000	1,000000

La qualité des valeurs approchées demeure satisfaisante. La dernière ligne de la table élaborée par la DGSIE a trait à tous les âges révolus supérieurs ou égaux à 104 ans (notés 104+). Nous fermerons la table à 104 ans révolus (en posant $q_{\underline{104}} = 1$). La table entre âges exacts qui en résulte est fermée à 105 ans exacts (en posant $q_{105} = 1$).

6. Espérance de vie

6.1. Définition et calcul. L'espérance de vie est, par définition (probabiliste), l'espérance mathématique de la durée de vie restante. L'espérance de vie à l'âge x est notée e_x.

Pour les personnes d'***âge exact x≥0*** :
1°) qui décéderont avant l'âge x+1, la durée de vie restante est égale à 0,5 avec une probabilité q_x ;
2°) qui ne décéderont pas dans l'année, la durée de vie restante est égale à $1 + e_{x+1}$, avec une probabilité $1 - q_x$.

On a donc :
$$e_x = 0{,}5\ q_x + (1 + e_{x+1})\ (1 - q_x) \tag{11}$$

La même formule s'applique aux personnes d'***âge révolu x≥0*** :
$$e_{\underline{x}} = 0{,}5\ q_{\underline{x}} + (1 + e_{\underline{x+1}})\ (1 - q_{\underline{x}}) \tag{12}$$

Rappelons que les formules (11) et (12) supposent la répartition uniforme des décès dans l'année qui sépare deux âges consécutifs, révolus ou exacts, selon le cas. Elle n'est pas applicable telle quelle à la naissance dans le cas de la table entre âges révolus. Dans ce cas, l'espérance mathématique de la durée de vie restante devient :
$$e_{birth} = \theta \cdot q_{birth} + (0{,}5 + e_{\underline{0}})\ (1 - q_{birth}) \tag{13}$$

où θ est l'âge moyen au décès entre la naissance et l'âge révolu $\underline{0}$. Dans l'hypothèse de la répartition uniforme des décès pendant cette période, θ = 0,33, ce qui correspond à l'âge du centre de gravité du 1^er triangle. Cette hypothèse est contredite par l'observation, qui a conduit la DGSIE à adopter θ = 0,1 pour les tables récentes. Le résultat n'est cependant guère affecté par ce choix.

N.B. La valeur de e_{birth} calculée selon (13) doit coïncider avec celle de e_0 calculée selon (11).

6.2. Valeurs approchées pour x > 0. Les formules (10) à (12) suggèrent la valeur approchée suivante, calculée directement à partir de la table entre âges révolus, et que nous testerons numériquement ensuite :
$$e_x \approx \frac{e_{\underline{x-1}} + e_{\underline{x}}}{2} \tag{14}$$

6.3. Exemple concret. Revenons à l'exemple précédent (voir paragraphe 5.4). Le tableau 5 ci-dessous fournit les espérances de vie :
1°) de la table entre âges révolus, calculées selon les formules (13) et (12) ;
2°) de la table entre âges exacts, calculées sur la base des quotients de mortalité exacts (voir formule 9), selon la formule (11) ;
3°) de la table entre âges exacts, calculées sur la base des quotients de mortalité approchés (voir formule 10), selon la formule (11) ;
4°) de la table entre âges exacts, calculées selon la formule (14).

Tableau 5a. Exemple concret : de la naissance à 4 ans

Table entre âges révolus	
âge révolu	espérance de vie selon (13) et (12)
birth	77,15
$\underline{0}$	76,90
$\underline{1}$	75,97
$\underline{2}$	74,99
$\underline{3}$	74,01
$\underline{4}$	73,02

Table entre âges exacts					
âge exact	espérance de vie selon (9) et (11)	espérance de vie val. approx. selon (10) et (11)	*écart absolu*	espérance de vie val. approx. selon (14)	*écart absolu*
0	77,15	-	-	-	-
1	76,44	76,42	*-0,01*	76,43	*-0,00*
2	75,48	75,47	*0,01*	75,48	*-0,00*
3	74,50	74,49	*0,01*	74,50	*0,00*
4	73,52	73,50	*0,01*	73,52	*-0,00*

La qualité des valeurs approchées, particulièrement la valeur fournie par la formule (14), est excellente. Elle diminue quand l'âge augmente mais demeure satisfaisante jusqu'aux âges extrêmes, comme on peut le voir dans les tableaux suivants.

Tableau 5b. Exemple concret : de 79 à 84 ans

Table entre âges révolus	
âge révolu	espérance de vie selon (13) et (12)
79	7,80
80	7,28
81	6,77
82	6,29
83	5,85
84	5,44

Table entre âges exacts					
âge exact	espérance de vie selon (9) et (11)	espérance de vie val. approx. selon (10) et (11)	*écart absolu*	espérance de vie val. approch. selon (14)	*écart absolu*
80	7,55	7,53	*0,02*	7,54	*-0,01*
81	7,04	7,02	*0,02*	7,03	*-0,01*
82	6,54	6,53	*0,02*	6,53	*-0,01*
83	6,08	6,07	*0,02*	6,07	*-0,01*
84	5,66	5,64	*0,02*	5,65	*-0,01*

Tableau 5c. Exemple concret : de 99 à 105 ans

Table entre âges révolus	
âge révolu	espérance de vie selon (13) et (12)
99	1,88
100	1,99
101	1,72
102	1,51
103	0,97
104+	*0,17*

Table entre âges exacts					
âge exact	espérance de vie selon (9) et (11)	espérance de vie val. approx. selon (10) et (11)	*écart absolu*	espérance de vie val. approch. selon (14)	*écart absolu*
100	1,92	1,94	*-0,02*	1,90	*0,02*
101	1,88	1,85	*0,03*	1,80	*-0,03*
102	1,64	1,61	*0,03*	1,53	*-0,03*
103	1,29	1,21	*0,08*	1,11	*-0,05*
104	0,82	0,73	*0,08*	0,49	*-0,08*
105	0,50	0,50	*0,00*	-	-

La DGSIE pose $e_{\underline{104+}}$ = 0,17 sans justification avancée à ce jour, alors que la formule (12) conduit à $e_{\underline{104}}$ = 0,50 ; $e_{\underline{103}}$ = 0,97 ; $e_{\underline{102}}$ = 1,51 ; etc. La valeur adoptée par la DGSIE ($e_{\underline{104+}}$ = 0,17) aurait dû entraîner $e_{\underline{103}}$ = 0,81 ; $e_{\underline{102}}$ = 1,40 ; etc. En-dessous de 95 ans, l'effet est toutefois imperceptible, de sorte que l'incidence de la valeur $q_{\underline{104+}}$ ne porte que sur les valeurs ultimes.

6. Résumé et conclusion

Lors de l'édition 1994 des tables belges de mortalité, un changement de méthodologie s'est produit : alors qu'auparavant, les tables étaient établies entre âges exacts, elles le sont désormais entre âges révolus. La présente note vise à fournir une méthode permettant de passer d'une table entre âges révolus à une table entre âges exacts. Le tableau 6 donne un récapitulatif des formules à utiliser.

Tableau 6. Méthode permettant de passer d'une table entre âges exacts à une table entre âges révolus

âge 0	âge x > 0
$q_0 = q_{birth} + (1 - q_{birth}) \frac{q_{\underline{0}}}{2}$ (6)	$q_x = \frac{q_{\underline{x-1}} + q_{\underline{x}} - q_{\underline{x-1}} \cdot q_{\underline{x}}}{2 - q_{\underline{x-1}}}$ (9) $q_x \approx \frac{q_{\underline{x-1}} + q_{\underline{x}}}{2}$ (10)
$e_{birth} = 0{,}1 \cdot q_{birth} + (0{,}5 + e_{\underline{0}})\ (1 - q_{birth})$ (13) N.B. La valeur de e_{birth} calculée selon (13) coïncide avec celle de e_0 calculée selon (11).	$e_x = 0{,}5\ q_x + (1 + e_{x+1})\ (1 - q_x)$ x≥0 (11) $e_x \approx \frac{e_{\underline{x-1}} + e_{\underline{x}}}{2}$ x>0 (14)

Dans les conditions de mortalité prévalant en Belgique :
▪ le quotient de mortalité à l'âge exact x > 0 est approximativement égal à la moyenne entre les quotients de mortalité aux âges de x-1 et x ans révolus ;
▪ l'espérance de vie à l'âge exact x > 0 est approximativement égale à la moyenne entre les espérances de vie aux âges de x-1 et x ans révolus.

Grosso modo, pour x > 0, la table entre âges révolus coïncide avec la table entre âges exacts correspondante, vieillie de 6 mois. Toutes les fonctions de la table sont décalées de 6 mois : ainsi, l'espérance de vie figurant dans le tableau 5b sur la ligne de 82 ans révolus, soit 6,29 ans, est également l'espérance de vie à l'âge exact 82,5 ans.

Confondant espérance de vie à l'âge révolu avec espérance de vie à l'âge exact, une lecture insuffisamment attentive de la table entre âges révolus conduit donc à une sous-estimation de la longévité.

Christian JAUMAIN, actuaire, professeur émérite de l'UCL
Christophe VANDESCHRICK, chercheur, Centre de recherche en démographie et sociétés de l'UCL

Bibliographie succincte

LEBRUN L. (1996), « Tables de mortalité 1994. Présentation générale ; méthodologie ; produits », Communiqué hebdomadaire de l'institut national de statistique, n°2617, pp. 61-74.

PETAUTON P. (2004), *Théorie et pratique de l'assurance vie*, Dunod, 3ème édition. (Présentation actuarielle des tables de mortalité).

VALLIN J. et CASELLI G. (2001), « Chapitre 11. La table de mortalité d'une génération », *in* G. CASELLI, J. VALLIN et G. WUNSCH, *Démographie : analyse et synthèse. Tome I. La dynamique des populations*, Paris, Éditions de l'Institut National d'Études Démographiques (INED), pp. 165-212. (Présentation démographique des tables de mortalité).

VALLIN J. et CASELLI G. (2001), « Chapitre 14. L'artifice de la cohorte fictive », *in* G. CASELLI, J. VALLIN et G. WUNSCH, *Démographie : analyse et synthèse. Tome I. La dynamique des populations*, Paris, Éditions de l'Institut National d'Études Démographiques (INED), pp. 271-327. (Présentation démographique des tables de mortalité).