Sterftetafel: van verstreken leeftijden naar exacte leeftijden

Update 4/9/2012

Inleiding

Deze nota wil een eenvoudige methode geven om tafels tussen *verstreken* leeftijden, zoals voortaan gepubliceerd door de ADSEI[1], het voormalige NIS[2], om te zetten in tafels tussen *exacte* leeftijden, die interessant kunnen zijn voor verschillende gebruikers zoals actuarissen, verzekeraars, demografen enz. De nota wordt gevolgd door de volledige reeks Belgische tafels tussen exacte leeftijden.

De sterftetafel die het NIS publiceerde voor de jaren 1994-1996, betekent immers een methodologische breuk. De voorgaande tafels tot en met die van de jaren 1991-1993 werden opgemaakt tussen exacte leeftijden terwijl dat daarna gebeurde tussen verstreken leeftijden.

De voorstelling van de tafels 1994-1996 en volgende is echter niet gewijzigd ten aanzien van de voorgaande tafels. Ze bevat met name de volgende rubrieken, met de cijfers van tafel 2002 Mannen als voorbeeld:

leeftijd	sterftekans	overlevenden	sterfgevallen	levens-verwachting
0	0,004032	1.000.000	4.032	75,58
1	0,001280	995.968	1.275	74,88
2	0,000424	994.693	421	73,98

In de tafels 1994-1996 en volgende gelden de leeftijden als *verstreken*, terwijl de leeftijden van de voorgaande tafels *exact* zijn. Zoals men kan vaststellen, staat deze essentiële informatie niet in de tafels zelf, wat helaas tot verwarring kan leiden. Bovendien dient te worden opgemerkt dat afhankelijk van de uitgave de op de eerste regel vermelde leeftijd “0” of een mysterieuze “<1” is.

En dat is nog niet alles: met betrekking tot de verstreken leeftijden zijn de cijfers van de tafels 1994-1996 en 3volgende onjuist:
▪ de cijfers die op de regel van de leeftijd 0 in de tafel staan, stemmen niet overeen met de verstreken leeftijd 0. Bovendien stemt de levensverwachting van 75,58 jaar niet overeen met de exacte leeftijd 0 (dit wil zeggen met de geboorte), noch met de verstreken leeftijd 0.
▪ de cijfers die overeenstemmen met de volgende leeftijden zijn een regel verschoven:
- de cijfers die op de regel van de leeftijd 1 van de tafel staan, stemmen in werkelijkheid overeen met de verstreken leeftijd 0;
- de cijfers die op de regel van de leeftijd 2 van de tafel staan, stemmen in werkelijkheid overeen met de verstreken leeftijd 1 enzovoort.

De ADSEI corrigeerde dat gelukkig bij de publicatie van de tafels van 2007 en op haar website[3] staan nu de tafels van alle jaren van 1998 tot 2009. Voor de tafel 2002 worden bijvoorbeeld de volgende cijfers vermeld waarvan de vergelijking met die van de eerste tabel “verhelderend” is:

verstreken leeftijd	sterftekans	overlevenden	sterfgevallen	levens-verwachting
birth	0,004032	1.000.000	4.032	75,08
0	0,001280	995.968	1.275	74,88
1	0,000424	994.693	421	73,98

[1] Algemene Directie Statistiek en Economische Informatie.
[2] Nationaal Instituut voor de Statistiek.
[3] Zie http://statbel.fgov.be/nl/modules/publications/statistiques/bevolking/bevolking_sterftetafels.jsp

Men vindt er de hierboven aangehaalde fouten terug. In het bijzonder wordt de levensverwachting bij de geboorte, een mediatieke indicator van de levensduur, overschat met een half jaar in de tafels 1994-1996 en volgende, terwijl bij de daarna volgende leeftijden de levensverwachting te maken kreeg met een verjonging van een jaar.

1. Terminologie inzake leeftijd

In de demografie worden de volgende leeftijden onderscheiden:

De **exacte leeftijd** berekent de precieze duur die is verstreken sinds de geboorte en verandert dus op ieder ogenblik. Hij wordt uitgedrukt in jaren, maanden en dagen of in tienden en honderdsten van jaren. Behalve indien anders vermeld zijn de exacte leeftijden die hier worden bedoeld de gehele exacte leeftijden.

De **verstreken leeftijd** is de leeftijd op de laatste verjaardag, dit wil zeggen het gehele aantal jaren dat de persoon op een gegeven ogenblik heeft geleefd. De verstreken leeftijd op 3 januari 2012 van een persoon die op 3 september 1939 geboren is, bedraagt 72 jaar en zijn exacte leeftijd is 72 jaar en 4 maanden.

De (in de loop van het kalenderjaar) **bereikte leeftijd** is het verschil tussen het jaar waarin een gebeurtenis (overlijden, huwelijk, geboorte…) plaatsvindt en het geboortejaar van de betrokken persoon. Alle personen die werden geboren in 1939 en overleden in 2012, zijn gestorven op de bereikte leeftijd van 73 jaar, dit is 2012-1939.

2. Sterftetafel tussen verstreken leeftijden

Sinds 2009 publiceert de ADSEI de sterftetafels die ze uitdrukkelijk tafels in “verstreken leeftijd” noemt. Figuur 1 geeft het begin van een dergelijke volledig fictieve tafel weer met een begincijfer van 1.000 (en niet van 1.000.000 zoals de ADSEI doet). In dit voorbeeld (*cfr*. figuur 1.A):

1°) bedraagt het aantal overlevenden bij de geboorte, dit is op 0 exact jaar (en door de ADSEI “birth” genoemd) 1.000:

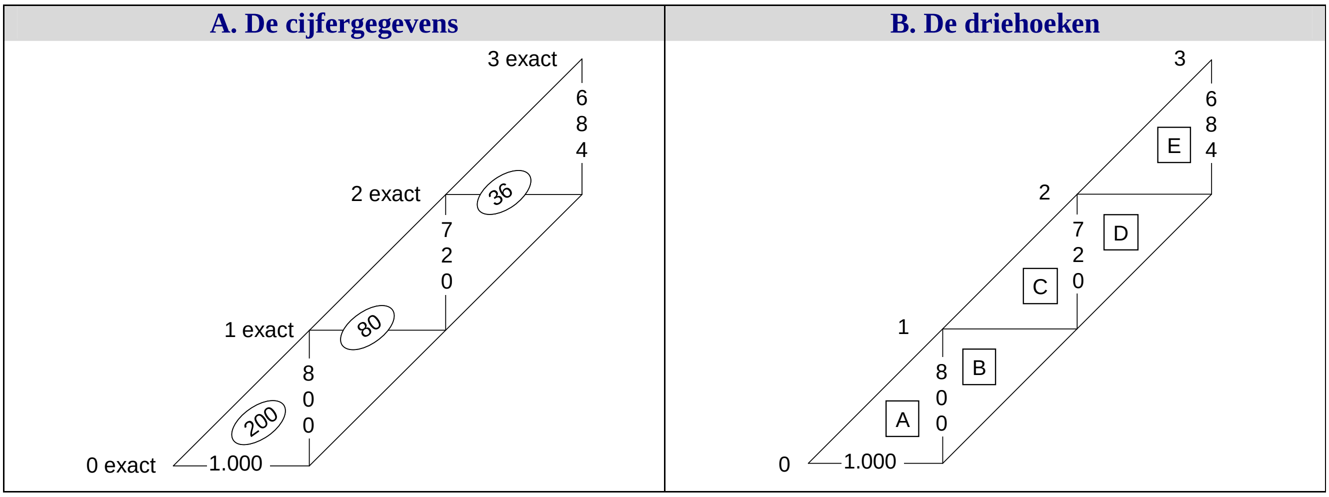
2°) Het aantal overlevenden op 0 verstreken jaar (dit is op het einde van het eerste levensjaar (kalenderjaar)) bedraagt 800. En dus:
▪ zijn er tussen de geboorte en 0 verstreken jaar 200 sterfgevallen, die in driehoek A (*cfr*. figuur 1.B) liggen;
▪ bedraagt de sterftekans tussen de geboorte en 0 verstreken jaar 200/1.000 = 20%. Dat quotiënt betreft de personen die tussen 0 en 1 jaar zullen leven tijdens hun geboortejaar.

3°) Het aantal overlevenden op 1 verstreken jaar (dit is op het einde van het 2e levensjaar) bedraagt 720. En dus:
▪ zijn er tussen 0 verstreken jaar en 1 verstreken jaar 80 sterfgevallen, die in de driehoeken B en C (*cfr*. figuur 1.B) liggen;
▪ bedraagt de sterftekans op 0 verstreken jaar 80/800 = 10%. Die sterftekans heeft, net als de daarna volgende, betrekking op 1 jaar;

4°) De sterftekans op 1 verstreken jaar bedraagt op dezelfde wijze 36/760 = 5% enzovoort.

De leeftijden van 0 verstreken jaar, 1 verstreken jaar enz. zullen worden genoteerd als $\underline{0}$, $\underline{1}$ enz.

Figuur 1. Voorstelling op Lexisdiagram van het begin van de begintafel tussen verstreken leeftijden



Tabel 1 geeft de opeenvolging van de gebeurtenissen weer. Zo hebben de 200 sterfgevallen van de tussenregel tussen de regel van de geboorte en de regel van 0 verstreken jaar bijvoorbeeld plaatsgevonden tussen de geboorte en 0 verstreken jaar, de leeftijden die de driehoek A afbakenen. Zo ook hebben de 80 sterfgevallen zich voorgedaan tussen 0 verstreken jaar en 1 verstreken jaar, de leeftijden die het parallellogram afbakenen dat samengesteld is uit de driehoeken B en C enzovoort.

Tabel 1. Begin van de tafel tussen verstreken jaren

leeftijd		***overlevenden***	***sterftekans***	***sterfgevallen***
birth of 0	geboorte	1.000	20%	
				200
0	31/12 van het geboortejaar	800	10%	
				80
1	31/12 van het jaar van de 1ste verjaardag	760	5%	
				36
2	31/12 van het jaar van de 2de verjaardag	684		

Deze wijze van opschuiven van de functies van de tafel in de tabel laat duidelijk zien dat de aantallen van sterfgevallen niet dezelfde tijdsreferentie hebben als de aantallen van overlevenden of de sterfterisco’s die ze hebben gelopen.

Het is bij de geboorte dat de 1.000 overlevenden worden geteld en een sterfterisico lopen vóór de leeftijd van 0 verstreken jaar van 20%. De 1.000 overlevenden en de sterftekans van 20% bevinden zich dus op dezelfde regel van de tabel. De 200 sterfgevallen onder de 1.000 overlevenden doen zich daarentegen voor tussen de geboorte en de leeftijd van 0 verstreken jaar. Die sterfgevallen vindt men dus terug op een tussenregel tussen die van de geboorte en die van 0 verstreken jaar.

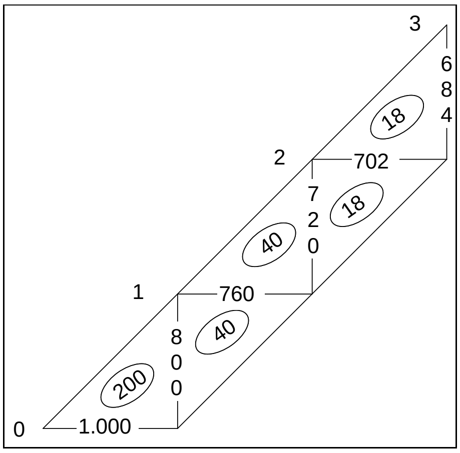
Op dezelfde manier worden de 800 overlevenden op de leeftijd van 0 verstreken jaar geteld en lopen ze een sterfterisico vóór de leeftijd van 1 verstreken jaar van 10%. De 800 overlevenden en de sterftekans van 10% bevinden zich dus op dezelfde regel van de tabel. De 80 sterfgevallen onder de 800 overlevenden doen zich daarentegen voor tussen de leeftijd van 0 verstreken jaar en de leeftijd van 1 verstreken jaar. Die sterfgevallen vindt men dus terug op een tussenregel tussen die van 0 verstreken jaar en die van 1 verstreken jaar enz.

3. Sterftetafel tussen exacte leeftijden

Hoe kan men op basis van die gegevens een tafel tussen exacte leeftijden berekenen? Als we uitgaan van een gelijke verdeling van de sterfgevallen, worden de 80 sterfgevallen tussen 0 verstreken jaar en 1 verstreken jaar verdeeld tussen de twee driehoeken B en C van figuur 1, met 40 sterfgevallen per driehoek. Bijgevolg bedraagt het aantal overlevenden op 1 exact jaar 800 – 40 = 760. Het aantal overlevenden op 2 exact jaar verkrijgt men op dezelfde wijze: 720 – 18 = 702.

De leeftijden van 0 exact jaar, 1 exact jaar enz. zullen worden genoteerd als 0, 1 enz.

Figuur 2. Voorstelling op een Lexisdiagram van de wijziging van de tafel



Tabel 2. Verdeling van de sterfgevallen per driehoek en berekening van het aantal sterfgevallen op exacte leeftijden

leeftijd	*overlevenden*	*sterfgevallen*
0 exact (0) of *birth*	1.000	
		200
0 verstreken (0)	800	
		40
1 exact (1)	760	
		40
1 verstreken (1)	720	
		18
2 exact (2)	702	
		18
2 verstreken (2)	684	

Tabel 3 vermeldt slechts wat nuttig is voor de tafel tussen exacte leeftijden, namelijk:

1°) de aantallen van overlevenden op exacte leeftijden, hierboven verkregen;

2°) de aantallen sterfgevallen tussen exacte leeftijden verkregen door optelling van de sterfgevallen in de parallellogrammen die afgebakend worden door 2 opeenvolgende exacte leeftijden. In het bijzonder zijn er tussen 0 exact jaar (de geboorte) en 1 exact jaar 240 sterfgevallen, dit is 200 van driehoek A plus 40 van driehoek B (*cfr*. figuur 1.B). Die sterfgevallen vindt men terug op een tussenregel tussen die van de geboorte en die van 1 exact jaar. Zo zijn er ook tussen 1 exact jaar en 2 exact jaar 40 + 18 = 58 sterfgevallen;

3°) de sterftekansen op exacte leeftijden, berekend door deling van het aantal sterfgevallen tussen twee opeenvolgende exacte leeftijden door het aantal overlevenden op de eerste van die twee leeftijden. In het bijzonder bedraagt de sterftekans bij de geboorte 240/1.000 = 24%. Het is bij de geboorte dat de 1.000 overlevenden vóór de leeftijd van 1 exact jaar een sterfterisico van 24% lopen. Het aantal van 1.000

overlevenden en de sterftekans van 24% bevinden zich dus op dezelfde regel van de tabel. Op dezelfde wijze bedraagt de sterftekans op de exacte leeftijd van 1 jaar 58/760 = 0,763%.

Tabel 3. Begin van de tafel tussen exacte jaren

exacte leeftijd		*overlevenden*	*sterfgevallen*	*sterftekans*
0	geboorte	1.000		24%
			240	
1	1ste verjaardag	760		7,63%
			58	
2	2de verjaardag	702		

De gevolgde procedure om de sterftekans op 1 exact jaar te verkrijgen, kan worden toegepast op alle hogere leeftijden[4].

In de volgende paragrafen zullen we zien hoe men een tafel tussen exacte leeftijden kan uitwerken op basis van een tafel tussen verstreken leeftijden, wat de bedoeling van deze nota is.

4. Aantal sterfgevallen en aantal overlevenden

4.1. Aantal sterfgevallen tussen de exacte leeftijden 0 en 1. We hebben, met evidente notaties:

$$d_{0\to 1} = d_{0\to\underline{0}} + \frac{d_{\underline{0}\to\underline{1}}}{2} \tag{1}$$

4.2. Aantal sterfgevallen tussen exacte leeftijden x > 0 en x+1[5]

$$d_{x\to x+1} = \left(\frac{d_{\underline{x-1}\to\underline{x}}}{2}\right) + \left(\frac{d_{\underline{x}\to\underline{x+1}}}{2}\right) \tag{2}$$

4.3. Aantal overlevenden op exacte leeftijden x > 0 op basis van een beginpopulatie l_0

$$l_x = l_{\underline{x-1}} - \left(\frac{d_{\underline{x-1}\to\underline{x}}}{2}\right) \quad \text{ou} \quad l_x = l_{x-1} - d_{x-1\to x} \tag{3}$$

5. Sterftekans

5.1. Sterftekans bij de geboorte

$$q_{0\to 1} = \frac{d_{0\to 1}}{l_0} = \frac{d_{0\to\underline{0}} + \dfrac{d_{\underline{0}\to\underline{1}}}{2}}{l_0} \tag{4}$$

waaruit volgt:

$$q_{0\to 1} = q_{0\to\underline{0}} + \frac{l_{\underline{0}} - l_{\underline{1}}}{2l_0}$$

[4] Vanuit zuiver methodologisch standpunt en zonder noemenswaardig gevolg voor de resultaten moet worden benadrukt dat de hypothese van een gelijke verdeling van de sterfgevallen tussen 2 exacte leeftijden, een hypothese die noodzakelijk is voor de berekening van de sterftetafel en in het bijzonder van de levensverwachtingen, op een tegenstrijdigheid stuit. De aantallen van sterfgevallen tussen de 2 exacte leeftijden x en x+1 worden verkregen door de optelling te maken van de helft van de waargenomen sterfgevallen enerzijds tussen x-1 verstreken en x verstreken en anderzijds tussen x verstreken en x+1 verstreken. Tenzij de aantallen van sterfgevallen tussen verstreken leeftijden stabiel zijn, zullen de driehoeken die het parallellogram tussen twee exacte leeftijden vormen, niet hetzelfde aantal sterfgevallen bevatten, wat in tegenspraak is met de hypothese van een gelijke verdeling, die nochtans wordt gebruikt bij onze verdere berekeningen.

[5] Door de actuarissen als d_x genoteerd.

$$q_{0\to 1} = q_{0\to\underline{0}} + \frac{l_{\underline{0}}}{l_0}\,\frac{l_{\underline{0}} - l_{\underline{1}}}{2l_{\underline{0}}}$$

$$q_{0\to 1} = q_{0\to\underline{0}} + (1 - q_{0\to\underline{0}})\,\frac{q_{\underline{0}\to\underline{1}}}{2} \tag{5}$$

d.w.z., met gebruik van de notatie $q_{0\to\underline{0}} = q_{birth}$ en $q_{0\to 1} = q_0$:

$$q_0 = q_{birth} + (1 - q_{birth})\,\frac{q_{\underline{0}}}{2} \tag{6}$$

Met die formule kan de waarde van het 1ste quotiënt van de tafel tussen exacte leeftijden (tussen 0 en 1 exact jaar) worden berekend op basis van de quotiënten van de tafel tussen verstreken leeftijden enerzijds tussen 0 exact jaar en 0 verstreken jaar en anderzijds tussen 0 verstreken jaar en 1 verstreken jaar.

5.2. Sterftekans op exacte leeftijden x > 0

$$q_{x\to x+1} = \frac{\left(\frac{d_{\underline{x-1}\to\underline{x}}}{2}\right) + \left(\frac{d_{\underline{x}\to\underline{x+1}}}{2}\right)}{l_{\underline{x-1}} - \left(\frac{d_{\underline{x-1}\to\underline{x}}}{2}\right)} \tag{7}$$

ofwel:

$$q_{x\to x+1} = \frac{d_{x\to x+1}}{l_x} \tag{8}$$

Uit de laatste relatie leidt men af, met gebruik van de notatie $q_{x\to x+1} = q_x$ (die ook geldt voor x=0):

$$q_x = \frac{l_{\underline{x-1}} - l_{\underline{x}} + l_{\underline{x}} - l_{\underline{x+1}}}{2l_{\underline{x-1}} - l_{\underline{x-1}} + l_{\underline{x}}} = \frac{l_{\underline{x-1}} - l_{\underline{x+1}}}{l_{\underline{x-1}} + l_{\underline{x}}}$$

Ofwel, aangezien:

$$1 - q_{\underline{x}} = \frac{l_{\underline{x+1}}}{l_{\underline{x}}}$$

$$q_x = \frac{1 - (1 - q_{\underline{x-1}})(1 - q_{\underline{x}})}{1 - (1 - q_{\underline{x-1}})} = \frac{q_{\underline{x-1}} + q_{\underline{x}} - q_{\underline{x-1}} \cdot q_{\underline{x}}}{2 - q_{\underline{x-1}}} \tag{9}$$

5.3. Benaderende waarden voor de exacte leeftijden x > 0.

Welnu :

$$\frac{1}{2 - q_{\underline{x-1}}} = \frac{1}{2} + \frac{q_{\underline{x-1}}}{4} + \frac{(q_{\underline{x-1}})^2}{8} + \ldots$$

Dus als de termen in $(q_{\underline{x-1}})^3$ verwaarloosbaar zijn, wat het geval is behoudens bij de uitersten van de tafel:

$$q_x \approx (q_{\underline{x-1}} + q_{\underline{x}} - q_{\underline{x-1}} \cdot q_{\underline{x}})\left(\frac{1}{2} + \frac{q_{\underline{x-1}}}{4} + \frac{(q_{\underline{x-1}})^2}{8} + \ldots\right) \qquad \text{(benaderende waarde)}$$

$$= \frac{q_{\underline{x-1}} + q_{\underline{x}}}{2} - \frac{q_{\underline{x-1}} \cdot q_{\underline{x}}}{2} + \frac{q_{\underline{x-1}} \cdot q_{\underline{x-1}}}{4} + \frac{q_{\underline{x-1}} \cdot q_{\underline{x}}}{4}$$

Er is compensatie tussen de 3 laatste termen die in ieder geval meestal verwaarloosbaar zijn als termen in $(q_{\underline{x-1}})^2$. Tot slot:

$$q_x \approx \frac{q_{\underline{x-1}} + q_{\underline{x}}}{2} \tag{10}$$

In het bijzonder als x=1 verkrijgt men: $q_1 \approx \frac{q_{\underline{0}} + q_{\underline{1}}}{2} = \frac{10\% + 5\%}{2}$ = 7,50% terwijl q_x = 7,63%.

Als $q_{\underline{x-1}}$ = 1‰ en $q_{\underline{x}}$ = 1,07‰, wat het geval is rond 30 jaar, heeft men q_x = 1,0350‰ en $q_{x\ \text{benaderend}}$ = 1,0350‰.
Als $q_{\underline{x-1}}$ = 1% en $q_{\underline{x}}$ = 1,07%, wat het geval is rond 30 jaar, heeft men q_x = 1,0348% en $q_{x\ \text{benaderend}}$ = 1,0350%.
Als $q_{\underline{x-1}}$ = 10% en $q_{\underline{x}}$ = 10,7%, wat het geval is rond 30 jaar, heeft men q_x = 10,33% en $q_{x\ \text{benaderend}}$ = 10,35%.

5.4. Concreet voorbeeld. Tabel 4 hieronder geeft de cijfers van een tafel tussen verstreken leeftijden opgemaakt door de ADSEI (het betreft de tafel 2009 Mannen). We leiden er de cijfers van de tafel tussen exacte leeftijden uit af.

Tabel 4a. Concreet voorbeeld: van de geboorte tot 4 jaar

Tafel tussen verstreken leeftijden				Tafel tussen exacte leeftijden			
leeftijd	sterftekans	overlevenden	sterf-gevallen	leeftijd	over-levenden	sterftekans	sterftekans benadering
*birth**	0,003160	1.000.000		0 exact*	1.000.000	0,003643	-
			3.160		3.643		
0 révolu	0,000969	996.840					
			966	1 exact	996.357	0,000634	0,000634
1 révolu	0,000298	995.874			631,5		
			297	2 exacts	995.725,5	0,000236	0,000236
2 révolus	0,000173	995.577			235		
			173	3 exacts	995.490,5	0,000199	0,000199
3 révolus	0,000224	995.404			198		
			223	4 exacts	995.292,5	0,000193	0,000193

* Laten we eraan herinneren dat de exacte leeftijd 0 van de tafel tussen exacte leeftijden samenvalt met de leeftijd *birth* van de tafel tussen verstreken leeftijden.

De aantallen sterfgevallen van de tafel tussen exacte leeftijden worden als volgt verkregen:
▪ 3.643 = 3.160 + 966/2
▪ 631,5 = (966 + 297)/2
▪ 235 = (297 + 173)/2 enzovoort.

De aantallen van overlevenden worden als volgt verkregen:
▪ 996.357 = 1.000.000 – 3.643
▪ 995.725,5 = 996.357 – 631,5
▪ 995.490,5 = 995.725,5 – 235 enzovoort.

De sterftekansen worden als volgt verkregen:
▪ 0,003643 = 3.643/1.000.000
▪ 0,000634 = 631,5/996.357
▪ 0,000236 = 235/995.725,5 enzovoort.
Die waarden vallen samen met de waarden die men verkrijgt via de formules (6) en (9).

De benaderende waarden die men verkrijgt via de formule (10) zijn:
▪ 0,000634 = (0,000969 + 0,000298)/2
▪ 0,000236 = (0,000298 + 0,000173)/2
▪ 0,000199 = (0,000173 + 0,000224)/2 enzovoort.
De verschillen met de waarden die worden verkregen via de formule (9) is kleiner dan 0,000001.

Nadat we, zoals we zojuist deden, de dubbelzinnigheden met betrekking tot de intervallen van het zich voordoen van sterfgevallen weggenomen hebben, nemen we de volgende vereenvoudigde en gebruikelijke voorstellingen aan.

Tabel 4a(bis). Concreet voorbeeld: van de geboorte tot 4 jaar

Tafel tussen verstreken leeftijden			
verstr. leeftijd	sterfte-kans	over-levenden	sterf-geval.
0 exact*	0,003160	1.000.000	3.160
0	0,000969	996.840	966
1	0,000298	995.874	297
2	0,000173	995.577	173
3	0,000224	995.404	223
4	0,000163	995.181	162

Tafel tussen exacte leeftijden				
exacte leeft.	sterf-geval.	over-levenden	sterfte-kans	sterftekans benadering
0*	3.643	1.000.000	0,003643	-
1	631,5	996.357	0,000634	0,000634
2	235	995.725,5	0,000236	0,000236
3	198	995.490,5	0,000199	0,000199
4	192,5	995.292,5	0,000193	0,000193

* Soulignons l'ambiguïté des notations de cette première ligne : le quotient de mortalité et le nombre de décès sont relatifs à la période 0→0 et ne peuvent être assimilés avec leurs homologues de la table entre âges exacts, qui sont relatifs à la période 0→1.

Tabel 4b. Concreet voorbeeld: van 79 tot 84 jaar

Tafel tussen verstreken leeftijden			
verstr. leeftijd	sterfte-kans	over-levenden	sterf-geval.
79	0,061995	532.519	33.013
80	0,067858	499.505	33.895
81	0,076211	465.610	35.484
82	0,088361	430.125	38.006
83	0,099157	392.119	38.881
84	0,110241	353.238	38.941

Tafel tussen exacte leeftijden				
exacte leeft.	sterf-geval.	over-levenden	sterfte-kans	sterftekans benadering
80	33.454	516.012	0,064833	0,064926
81	34.690	482.557	0,071888	0,072034
82	36.745	447.868	0,082045	0,082286
83	38.444	411.122	0,093509	0,093759
84	38.911	372.678	0,104410	0,104699

We zien dat de kwaliteit van de benaderende waarden uitstekend blijft aangezien de relatieve afwijking kleiner is dan 3 ‰.

Tabel 4c. Concreet voorbeeld: van 99 tot 105 jaar

Tafel tussen verstreken leeftijden			
verstr. leeftijd	sterfte-kans	over-levenden	sterf-geval.
99	0,446809	6.548	2.926
100	0,329670	3.623	1.194
101	0,390244	2.428	948
102	0,312500	1.481	463
103	0,533333	1.018	543
104+	1,000000	475	475

Tafel tussen exacte leeftijden				
exacte leeft.	sterf-geval.	over-levenden	sterfte-kans	sterftekans benadering
100	2.060	5.085	0,405088	0,388239
101	1.071	3.025	0,353979	0,359957
102	705	1.954	0,360795	0,351372
103	503	1.249	0,402469	0,422917
104	509	747	0,681818	0,766667
105	238	238	1,000000	1,000000

De kwaliteit van de benaderende waarden blijft bevredigend. De laatste regel van de tafel die door de ADSEI werd uitgewerkt, heeft betrekking op alle verstreken leeftijden boven of gelijk aan 104 jaar (genoteerd als 104+). We zullen de tafel op 104 verstreken jaren afsluiten (door te stellen dat $q_{\underline{104}} = 1$). De tafel tussen exacte leeftijden die daaruit voortvloeit, is afgesloten op 105 exacte jaren (door te stellen dat $q_{105} = 1$).

6. Levensverwachting

6.1. Definitie en berekening. De levensverwachting is in een (probabilistische) definitie de gemiddelde resterende levensduur. De levensverwachting op de leeftijd x wordt genoteerd als e_x.

Voor de personen met ***exacte*** leeftijd $\boldsymbol{x \geq 0}$:
1°) die zullen sterven vóór de leeftijd van x+1, is de resterende levensduur gelijk aan 0,5 met een waarschijnlijkheid van q_x;
2°) die niet binnen een jaar zullen sterven, is de resterende levensduur gelijk aan 1 + e_{x+1}, met een waarschijnlijkheid van $1 - q_x$.

We krijgen dus:

$$e_x = 0{,}5\, q_x + (1 + e_{x+1})\,(1 - q_x) \qquad (11)$$

De zelfde formule is van toepassing voor de personen met ***verstreken*** leeftijd $\boldsymbol{x \geq 0}$:

$$e_{\underline{x}} = 0{,}5\, q_{\underline{x}} + (1 + e_{\underline{x+1}})\,(1 - q_{\underline{x}}) \qquad (12)$$

We moeten eraan herinneren dat de formules (11) en (12) de gelijke verdeling veronderstelt van de sterfgevallen binnen het jaar dat twee opeenvolgende, afhankelijk van het geval verstreken of exacte, leeftijden scheidt. Ze is niet als dusdanig van toepassing op de geboorte in het geval van de tafel tussen verstreken leeftijden. In dat geval wordt het gemiddelde van de resterende levensduur:

$$e_{birth} = \theta \cdot q_{birth} + (0{,}5 + e_{\underline{0}})\,(1 - q_{birth}) \qquad (13)$$

waarbij θ de gemiddelde leeftijd bij overlijden is tussen de geboorte en de verstreken leeftijd 0. In de hypothese van de gelijke verdeling van de sterfgevallen tijdens die periode, θ = 0,33 wat overeenstemt met de leeftijd van het zwaartepunt van de 1ste driehoek. Die hypothese wordt tegengesproken door de waarneming, die ertoe geleid heeft dat de ADSEI θ = 0,1 in acht neemt voor de recente tafels. Het resultaat wordt echter nauwelijks beïnvloed door die keuze.

N.B. De waarde van e_{birth} berekend volgens (13) moet overeenstemmen met die van e_0 berekend volgens (11).

6.2. Benaderende waarden voor x > 0. De formules (10) tot (12) stellen de volgende benaderende waarde voor, die rechtstreeks op basis van de tafel tussen verstreken leeftijden werd berekend en die we vervolgens numeriek zullen testen:

$$e_x \approx \frac{e_{\underline{x-1}} + e_{\underline{x}}}{2} \qquad (14)$$

6.3. Concreet voorbeeld. We nemen terug het bovenstaande voorbeeld (zie paragraaf 5.4). Tabel 5 hieronder geeft de levensverwachtingen:
1°) van de tafel tussen verstreken leeftijden, berekend volgens formules (13) en (12);
2°) van de tafel tussen exacte leeftijden, berekend op basis van de exacte sterftequotiënten (zie formule 9), volgens formule (11);
3°) van de tafel tussen exacte leeftijden, berekend op basis van de benaderende sterftequotiënten (zie formule 10), volgens formule (11);
4°) van de tafel tussen verstreken leeftijden, berekend volgens formule (14).

Tabel 5a. Concreet voorbeeld: van de geboorte tot 4 jaar

Tafel tussen verstreken leeftijden	
verstr. leeftijd	levens-verwachting volgens (13) en (12)
0 exact	77,15
0	76,90
1	75,97
2	74,99
3	74,01
4	73,02

Tafel tussen exacte leeftijden					
exacte leeft.	levens-verwachting volgens (9) en (11)	levens-verwachting benadering volg. (10) en (11)	*verschil*	levens-verwachting benadering volg. (14)	*verschil*
0	77,15	-	-	-	-
1	76,44	76,42	*-0,01*	76,43	*-0,00*
2	75,48	75,47	*0,01*	75,48	*-0,00*
3	74,50	74,49	*0,01*	74,50	*0,00*
4	73,52	73,50	*0,01*	73,52	*-0,00*

De kwaliteit van de benaderende waarden, in het bijzonder de waarde op basis van formule (14), is uitstekend. Ze vermindert wanneer de leeftijd verhoogt maar blijft bevredigend tot de uiterste leeftijden, zoals men kan zien in de volgende tabellen.

Tabel 5b. Concreet voorbeeld: van 79 tot 84 jaar

Tafel tussen verstreken leeftijden	
verstr. leeftijd	levens-verwachting volgens (13) en (12)
79	7,80
80	7,28
81	6,77
82	6,29
83	5,85
84	5,44

Tafel tussen exacte leeftijden					
exacte leeft.	levens-verwachting volgens (9) en (11)	levens-verwachting benadering volg. (10) en (11)	*verschil*	levens-verwachting benadering volg. (14)	*verschil*
80	7,55	7,53	*0,02*	7,54	*-0,01*
81	7,04	7,02	*0,02*	7,03	*-0,01*
82	6,54	6,53	*0,02*	6,53	*-0,01*
83	6,08	6,07	*0,02*	6,07	*-0,01*
84	5,66	5,64	*0,02*	5,65	*-0,01*

Tabel 5c. Concreet voorbeeld: van 99 tot 105 jaar

Tafel tussen verstreken leeftijden	
verstr. leeftijd	levens-verwachting volgens (13) en (12)
99	1,88
100	1,99
101	1,72
102	1,51
103	0,97
104+	*0,17*

Tafel tussen exacte leeftijden					
exacte leeft.	levens-verwachting volgens (9) en (11)	levens-verwachting benadering volg. (10) en (11)	*verschil*	levens-verwachting benadering volg. (14)	*verschil*
100	1,92	1,94	*-0,02*	1,90	*-0,02*
101	1,88	1,85	*0,03*	1,80	*-0,03*
102	1,64	1,61	*0,03*	1,53	*-0,03*
103	1,29	1,21	*0,08*	1,11	*-0,05*
104	0,82	0,73	*0,08*	0,49	*-0,08*
105	0,50	0,50	*0,00*	-	-

De ADSEI stelt zonder verantwoording tot op vandaag dat $e_{\underline{104+}} = 0{,}17$, terwijl formule (12) leidt tot $e_{\underline{104}} = 0{,}50$; $e_{\underline{103}} = 0{,}97$; $e_{\underline{102}} = 1{,}51$; enz. De waarde die door de ADSEI wordt aangenomen ($e_{\underline{104+}} = 0{,}17$) had moeten leiden tot $e_{\underline{103}} = 0{,}81$; $e_{\underline{102}} = 1{,}40$ enz. Onder 95 jaar is het effect echter niet waarneembaar zodat de weerslag van de waarde $q_{\underline{104+}}$ slechts betrekking heeft op de uiterste waarden.

6. Samenvatting en conclusie

Bij de uitgave 1994 van de Belgische sterftetafels werd een methodologische wijziging doorgevoerd: terwijl de tafels vóór 1994 tussen exacte leeftijden werden opgemaakt, worden ze van dan af tussen verstreken leeftijden opgemaakt. Deze nota wil een methode aanreiken om een tafel tussen verstreken leeftijden om te zetten naar een tafel tussen exacte leeftijden. Tabel 6 vat de formules samen die daarbij gebruikt moeten worden.

Tabel 6. Methode waarmee men een tafel tussen verstreken leeftijden kan omzetten naar een tafel tussen exacte leeftijden.

leeftijd 0	**leeftijd x > 0**
$q_0 = q_{birth} + (1 - q_{birth}) \frac{q_0}{2}$ (6)	$q_x = \frac{q_{x-1} + q_x - q_{x-1} \cdot q_x}{2 - q_{x-1}}$ (9) $q_x \approx \frac{q_{x-1} + q_x}{2}$ (10)
$e_{birth} = 0{,}1 \cdot q_{birth} + (0{,}5 + e_0)\,(1 - q_{birth})$ (13) N.B. De waarde van e_{birth} berekend volgens (13) overeenstemt met die van e_0 berekend volgens (11).	$e_x = 0{,}5\, q_x + (1 + e_{x+1})\,(1 - q_x)$ x≥0 (11) $e_x \approx \frac{e_{x-1} + e_x}{2}$ x>0 (14)

In de sterfteomstandigheden die op dit ogenblik gelden in België:
▪ is de sterftekans op de exacte leeftijd x > 0 ongeveer gelijk aan het gemiddelde tussen de sterftekansen op de leeftijden van x-1 en x verstreken jaren;
▪ is de levensverwachting op de exacte leeftijd x > 0 ongeveer gelijk aan het gemiddelde tussen de levensverwachtingen op de leeftijden van x-1 en x verstreken jaren.

Grosso modo valt voor x > 0 de tafel tussen verstreken leeftijden samen met de overeenstemmende tafel tussen exacte leeftijden, verouderd met 6 maanden. Alle functies van de tafel zijn 6 maanden opgeschoven: zo is de levensverwachting in tabel 5b op de regel van 82 verstreken jaren, dit is 6,29 jaar, eveneens de levensverwachting op de exacte leeftijd 82,5 jaar.

Wanneer men de levensverwachting op de verstreken leeftijd verwart met de levensverwachting op de exacte leeftijd, leidt een onaandachtige lezing van de tafel tussen verstreken leeftijden dus tot een onderschatting van de levensduur.

Christian JAUMAIN, actuaris, emeritus professor van de UCL
Christophe VANDESCHRICK, onderzoeker, Centre de recherche en démographie et sociétés van de UCL

Beknopte bibliografie

LEBRUN L. (1996), *Sterftetafels 1994. Algemene voorstelling; methodologie; resultaten*, Wekelijks Communiqué van het Nationaal Instituut voor de Statistiek, n°2617, pp.61-74.

PETAUTON P. (2004), *Théorie et pratique de l'assurance vie*, Dunod, 3ème édition. (Actuariële presentatie van de sterftetafels).

VALLIN J. et CASELLI G. (2001), « Chapitre 11. La table de mortalité d'une génération », *in* G. CASELLI, J. VALLIN et G. WUNSCH, *Démographie : analyse et synthèse. Tome I. La dynamique des populations*, Paris, Éditions de l'Institut National d'Études Démographiques (INED), pp. 165-212. (Demografische presentatie van de sterftetafels).

VALLIN J. et CASELLI G. (2001), « Chapitre 14. L'artifice de la cohorte fictive », *in* G. CASELLI, J. VALLIN et G. WUNSCH, *Démographie : analyse et synthèse. Tome I. La dynamique des populations*, Paris, Éditions de l'Institut National d'Études Démographiques (INED), pp. 271-327. (Demografische presentatie van de sterftetafels).